

推定

張 梁

2007 年 7 月 24 日

1 点推定

1.1 不偏性，有効性，一致性

1.1.1 不偏性

大きさ n のサンプルから作られる母数 θ の推定量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ が，

$$E(\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)) = \theta \quad (1)$$

を満たすとき， $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ を θ の不偏推定量といい，その実現値 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を不偏推定値という。

つまり，サンプルを何回もとると， $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ が母数 θ を平均値として分布することを意味している。この性質を不偏性という。

不偏分散の不偏性（証明は手書きの部分）

標本平均の不偏性（証明は手書きの部分）

1.1.2 有効性

2 つの不偏推定量 $\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ， $\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ に対して，

$$V(\hat{\theta}_1) \leq V(\hat{\theta}_2) \quad (2)$$

であるとき， $\hat{\theta}_1$ は $\hat{\theta}_2$ より有効な推定量といい，分散が最小の推定量を有効推定量という。

クラメル・ラオの不等式

$$V(\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)) \geq \frac{1}{nE\left[\left\{\frac{\partial \log f(X;\theta)}{\partial \log \theta}\right\}^2\right]} \quad (3)$$

上の不等式において等号が成立するような $\hat{\theta}$ が存在すれば，分散の最小の不偏推定量であり，有効推定量となる。

例 1： ある分布の期待値を推定したい，手元にデータ X_1, X_2, X_3 ，良い推定量は次のどれでしょう？

(1) $Y = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$

(2) $Z = \frac{2X_1 + X_2 + X_3}{2}$

問：

(a) Y, Z は不偏推定量であるかどうか

(b) 不偏なら，分散の小さいほうはどれでしょう

(解答は手書きの部分)

例 2： 正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n のサンプル $X_1, X_2, \dots, X_n$ に対して，標本平均 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ は，母平均 μ の有効推定量である。(証明は手書きの部分)

1.1.3 一致性

任意の正数 ε に対して，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n) - \theta| < \varepsilon) = 1 \quad (4)$$

であるとき， $\hat{\theta}$ を θ の一致推定量といい， $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ を一致推定値という。 $\hat{\theta}$ は θ に確率収束する。

1.2 推定の方法

推定量を求める方法に，最尤推定法とモーメント推定法がある。

1.2.1 最尤法（最尤推定法）

尤度関数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の同時確率密度関数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$ をパラメータ θ の関数とみて，

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) \quad (5)$$

を尤度関数と呼ぶ。 $L(\theta)$ は尤度と呼ぶ。母数 θ がとりうる値の集合を母数空間と呼び， Θ で表す。

最尤推定値 & 最尤推定量 確率変数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ が互いに独立に同一の分布に従うならば, 尤度関数は x_i の確率密度関数 $f(x_i; \theta)$ の積となる。

$$L(\theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = f(x_1, \theta) f(x_2, \theta) \cdots f(x_n, \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \quad (6)$$

最尤法は尤度関数を母数区間 Θ で最大にするものを推定値や推定量とするもので, 尤度関数を最大にする値が最尤推定値, 関数としては最尤推定量である。

対数尤度関数 尤度関数を最大にすることと, その対数を最大にすることとは同じなので, 計算上に利用しやすいため, 通常は, 対数尤度関数

$$\log L(\theta) = \log \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i, \theta) \quad (7)$$

のほうを求める。

例 3: くじの当たる確率 p を推定したい, n 人が, 一人 m 回ずつくじを引く。 i 人目が当たった本数を X_i とする, データ $X_1, X_2, \dots, X_n$ が得られたときに, p の最尤推定量を求めよう。(解答は手書きの部分)

例 4: 正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う標本から最尤推定量を求める。(解答は手書きの部分)

1.2.2 モーメント推定法

(略)

参考文献

- [1] 石井 博昭・塩出 省吾・新森 修一:「確率統計の数理」(1995) 裳華房
- [2] 永田 靖:「統計学のための数学入門 30 講」(2005) 朝倉書店
- [3] 東京大学教養学部統計学教室 (編):「統計学入門」(2005) 東京出版会
- [4] 濱田 昇・田澤 新成:「統計学の基礎と演習」(2005) 共立出版
- [5] 石村 貞夫・デズモンド アレン:「すぐわかる統計用語」(2004)
- [6] 「数理統計学」講義ノート (笛田先生, 2006 年前期)