

基礎と演習

張 梁

2007 年 7 月 31 日

1 事象と確率

(略)

2 確率変数と確率分布

2.1 演習問題 1

表が出る確率が $p(0 < p < 1)$ である硬貨を裏が出るまで続けて投げるとき, 裏が出るまでに表が出る回数を X で表す。 X の期待値 $E(X)$ を求めよ。

2.2 解答

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{i=1}^n x \cdot p^x (1-p) \\ &= (1-p)(1 \cdot p^1 + 2 \cdot p^2 + 3 \cdot p^3 + \cdots + k \cdot p^k + \cdots) \\ p \cdot E(X) &= (1-p)(1 \cdot p^2 + 2 \cdot p^3 + \cdots + (k-1) \cdot p^k + \cdots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X) - pE(X) &= (1-p)(1 \cdot p^1 + 1 \cdot p^2 + 1 \cdot p^3 + \cdots + 1 \cdot p^k + \cdots) \\ (1-p)E(X) &= (1-p) \cdot \frac{p}{1-p} \\ E(X) &= \frac{p}{1-p} \end{aligned}$$

2.3 演習問題 2

確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が次の式で与えられるとき, X の平均値 $E(X)$ と X の分散 $V(X)$ を求めよう。

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (0 < x < 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (1)$$

2.4 解答

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)xdx \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot xdx + \int_0^1 2x \cdot xdx + \int_1^{\infty} 0 \cdot xdx \\ &= \int_0^1 2x^2dx = \frac{2}{3}[x^3]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \\ E(X^2) &= \int_0^1 2x^3dx = \frac{1}{2}[x^4]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \\ V(X) &= \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

3 離散型の確率分布

3.1 $E(X(X-1))$ を利用して計算する

定理 3.1. 確率変数 X が二項分布 $B(n, p)$ に従うとき, $q = 1 - p$ とすると, X の平均値, 分散, 次の式で与えられる。

$$E(X) = np, \quad V(X) = npq \quad (2)$$

証明その 1

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_x x \cdot {}_n C_x p^x q^{n-x} \\
 &= \sum_x x \cdot \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x q^{n-x} \\
 &= \sum_x \frac{n(n-1)!}{(n-x)!(x-1)!} p \cdot p^{x-1} q^{n-x} \\
 &= np \cdot \sum_x {}_{n-1} C_{x-1} p^{x-1} q^{n-x} \\
 &= np \\
 E(X^2) &= \sum_x x^2 \cdot {}_n C_x p^x q^{n-x} \\
 &= np \cdot \sum_x x \cdot {}_{n-1} C_{x-1} p^{x-1} q^{n-x} \\
 &= np \cdot \sum_x ((x-1) + 1) \cdot {}_{n-1} C_{x-1} p^{x-1} q^{n-x} \\
 &= np \cdot \left(\sum_x \frac{(x-1)(n-1)(n-2)!}{(n-x)!(x-1)(x-2)!} p \cdot p^{x-2} q^{n-x} + \sum_x {}_{n-1} C_{x-1} p^{x-1} q^{n-x} \right) \\
 &= np^2(n-1) \cdot \sum_x {}_{n-2} C_{x-2} p^{x-2} q^{n-x} + np \\
 &= n^2 p^2 - np^2 + np \\
 V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
 &= npq
 \end{aligned}$$

証明その 2

$$\begin{aligned}
 E(X) &= np \\
 E(X(X-1)) &= \sum_x x(x-1) \cdot {}_n C_x p^x q^{n-x} \\
 &= \sum_x x \cdot (x-1) \cdot \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x q^{n-x} \\
 &= \sum_x \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-x)!(x-2)!} p^2 \cdot p^{x-2} q^{n-x} \\
 &= n(n-1)p^2 \cdot \sum_x {}_{n-2} C_{x-2} p^{x-2} q^{n-x} \\
 &= n(n-1)p^2 \\
 V(X) &= E(X(X-1)) + E(X) - (E(X))^2 \\
 &= n^2 p^2 - np^2 + np - n^2 p^2 \\
 &= npq
 \end{aligned}$$

3.2 演習問題

あるくじで 1 等を引く確率は 0.1 で、2 等を引く確率は 0.2 で、残りはハズレである。このくじを 6 本引くとき、1 等が 1 本、2 等が 2 本、ハズレが 3 本である確率を求めよ。

3.3 解答

$$\frac{6!}{1!2!3!}(0.1)^1(0.2)^2(0.7)^3 = 0.08232$$

4 連続型の確率分布

4.1 演習問題 1

確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が次の式で与えられる。

$$f(x) = \begin{cases} cxe^{-x} & (x \geq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (3)$$

(1) c の値を求めよ。

(2) X の平均値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。

4.2 解答 (1)

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ から

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^0 0dx + \int_0^{\infty} cxe^{-x}dx \\ &= c \left(-[(x \cdot e^{-x} - \int_0^{\infty} e^{-x}dx)]_0^{\infty} \right) \\ &= c \\ \therefore c &= 1 \end{aligned}$$

4.3 解答 (2)

$$E(X) = 2, \quad E(X^2) = 6, \quad V(X) = 2$$

5 2 変量確率分布

5.1 演習問題

(X, Y) の同時確率密度関数 $f(x, y)$ が次の式で与えられる。

$$f(x) = \begin{cases} ce^{-x-y} & (0 < x < y \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (4)$$

(1) X の周辺確率密度関数 $f_1(x)$ を求めよ。

- (2) Y の周辺確率密度関数 $f_2(y)$ を求めよ。
- (3) c の値を求めよ。
- (4) X の平均値 $E(X)$ と分散 $V(X)$ を求めよ。
- (5) Y の平均値 $E(Y)$ と分散 $V(Y)$ を求めよ。
- (6) X と Y の共分散 $Cov(X, Y)$ と相関係数 $\rho(X, Y)$ を求めよ。

5.2 解答

(1)

$x > 0$ のとき,

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_x^{\infty} ce^{-x-y} dy \\ &= c \int_x^{\infty} e^{-(y+x)} dy \\ &= c \int_{-\infty}^{2x} e^t dt \quad (t = -(y+x)) \\ &= ce^{-2x} \end{aligned}$$

その他,

$$f_1(x) = 0$$

(2) (1) と同様に,

$y > 0$ のとき,

$$\begin{aligned} f_2(y) &= \int_0^y ce^{-x-y} dx \\ &= c(e^{-y} - e^{-2y}) \end{aligned}$$

その他,

$$f_2(y) = 0$$

(3) $\int_0^y \int_x^{\infty} f(x, y) dx dy = 1$ を利用して, c を求める。